高等数学基础知识

空间科学与应用物理系

2007.10

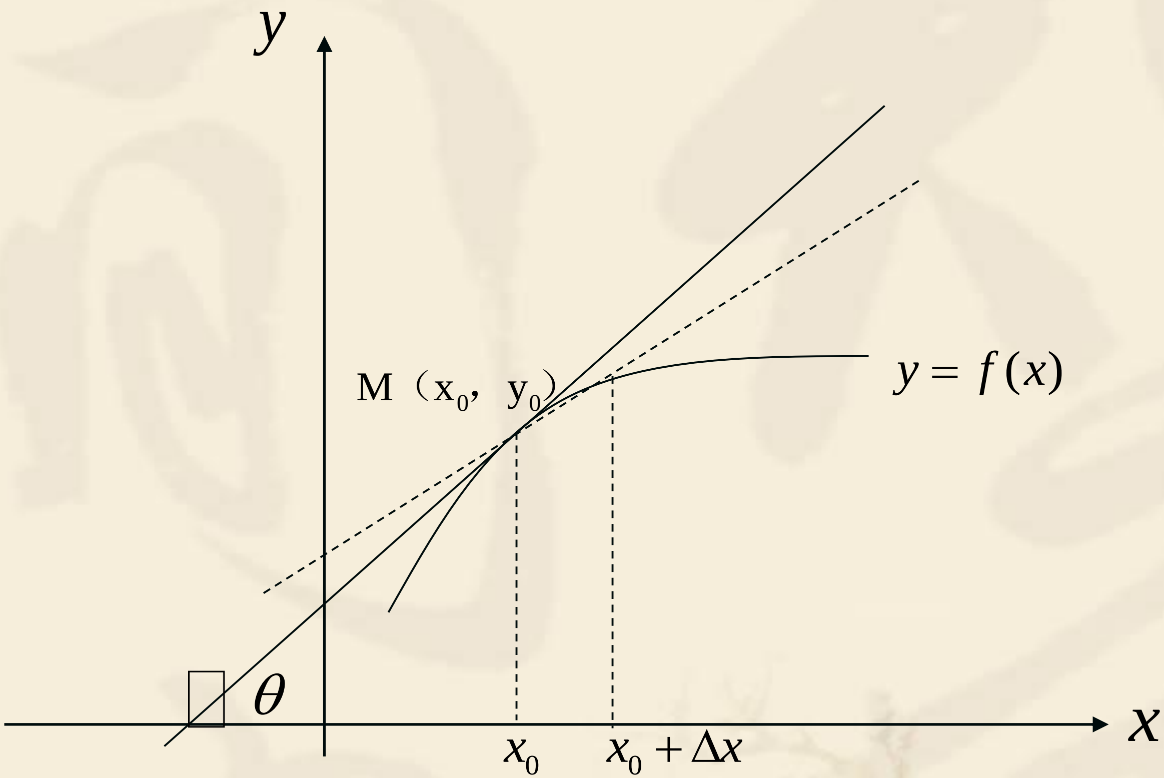
导数与微分的定义

- 一、导数
- 设函数 $y=f(x)$在x_0的邻域内有定义,给x在x_0处以增量$\Delta x(\neq 0)$，函数y相应地得到增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$存在，

则称函数在点x_0处可导，该极限值称为函数在x_0处的导数。记为$f'(x_0)$，$y'(x_0)$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$$



导数的几何意义：

$y = f(x)$在x_0处的导数$f'(x_0)$，表示曲线$y = f(x)$在M（x_0,y_0）处切线的斜率，即$\tan\theta = f'(x_0)$。

即：$f'_{(x_0)} = y'_{(x_0)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

那么

$$\boxed{dy = y' dx = f' dx}$$

二、导数与微分的运算法则

- 设 $u=u(x),v=v(x)$均可导，则

（1） $(cu)'=cu'$，$d(cu)=cdu$

（2） $(u+v)'=u'+v'$，$d(u+v)=du+dv$

（3） $(uv)'=uv'+vu'$，$d(uv)=udv+vdu$

（4）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$（$v\neq 0$）

$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$（$v\neq 0$）

三、基本公式

（1）y=常数　$y' = 0$　$dy = 0$

（2）$y=x^a$（a为实数）　$y' = ax^{a-1}$　$dy = ax^{a-1}dx$

（3）$y = a^x$　$y' = a^x \ln a$　$dy = a^x \ln a \cdot dx$

特例：$y = e^x$　$y' = e^x \ln e = e^x$　$dy = e^x dx$

(4)$y = \log_a x$，$a>0, a \neq 1, y' = \frac{1}{x \ln a}, dy = \frac{1}{x \ln a} dx$

特例：$y = \ln x$，$y' = \frac{1}{x}, dy = \frac{1}{x} dx$

(5)$y = \sin x, y' = \cos x, dy = \cos x dx$

其他求导公式参看高等数学。

四、复合函数求导法则

设$y = f(u)$，$u = g(x)$，且$u = g(x)$在x处可导，而$f(u)$在相应的u处可导，则复合函数$y = f(g(x))$在x处可导，且$\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}}$

例1、$y=\sin x^2$，可写为$y=\sin u$，$u=x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2$$

例2、$y=(2x+1)^{10}$，可写为$y=u^{10}$，$u=2x+1$

$$\frac{dy}{dx}=10\cdot u^9\cdot 2=20u^9=20(2x+1)^9$$

例题：对以下各式求导并求其微分

1、$y=4x^3+7x+1$　　2、$y=x+\dfrac{x+1}{x^2}$

3、$y=\ln(x^2+8)$　　4、$V=\dfrac{4\pi}{3}D^3$

解:1、$y'=12x^2+7$　　$dy=(12x^2+7)\,dx$

2、$y'=1+\dfrac{x^2\cdot 1-(x+1)\cdot 2x}{x^4}=1-\dfrac{x(x+2)}{x^4}$

$dy=\left(1-\dfrac{x(x+2)}{x^4}\right)dx$

3、$y'=\dfrac{2x}{x^2+8}$　　$dy=\left(\dfrac{2x}{x^2+8}\right)dx$

4、$V'=4\pi D^2$　　$dV=4\pi D^2dD$

五、偏导数

对一元函数y＝f（x），导数f'（x）就是函数f（x）关于自变量x的变化率，那么对于二元函数或多元函数，也需要考察它的变化率问题。因为多元函数的自变量不止一个，我们常常要用多元函数对其中某一个自变量的变化率，而其他自变量都保持不变。例如：$\boxed{P=\frac{RT}{V}}$

定义1 设二元函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)及其某个邻域内有定义，让y固定为y_0，而给x_0以增量，于是对应有关于x的偏增量，若极限存在，则称此极限为$f(x,y)$在点(x_0, y_0)处关于x的偏导数,记作：

$$f'_x(x_0, y_0) \text{ 或 } \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$

让x固定为x_0，而给y_0以增量，于是对应有关于y的偏增量，若极限存在，则称此极限为$f(x,y)$在点(x_0, y_0)处关于y的偏导数,记作：

$$f'_y(x_0, y_0) \text{ 或 } \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=y_0} .$$

由定义可知多元函数偏导数的计算，不需要建立新的方法，只需将其他变量看作常数即可。

例1 设$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$,求偏导数.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

例2 $P=\frac{RT}{V}$,求偏导数.

$$\frac{\partial P}{\partial V}=(RT\cdot V^{-1})'=-RT\cdot V^{-2}=-\frac{RT}{V^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial T}=(\frac{R}{V}\cdot T)'=\frac{R}{V}$$

六、全微分

定理：若$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微，则它在点(x_0, y_0)处的偏导数$f_x'(x_0, y_0)$和$f_y'(x_0, y_0)$存在。那么$dz|_{(x_0, y_0)} = f_x'(x_0, y_0)dx + f_y'(x_0, y_0)dy$

例1：求$u = e^x \sin y$的全微分。

解：$du = e^x \sin y dx + e^x \cos y \cdot dy$

例2：求$V=\frac{1}{4}\pi(r_2^2 - r_1^2)h$的全微分。

解：$dV=\frac{1}{4}\pi(r_2^2 - r_1^2)dh+\frac{1}{4}\pi h \cdot 2r_2 dr_2 - \frac{1}{4}\pi h \cdot 2r_1 dr_1$

$=\frac{1}{4}\pi[(r_2^2 - r_1^2)dh+2r_2 h dr_2 - 2r_1 h dr_1]$